7.4. 入力関数のニュートン法.

- 勾配法
  - 制御入力の修正によって評価関数が減少する方向を見つけた.

- シューティング法.
  - 随伴変数の初期値に対するニュートン法を考えた.

◎ 他の方法として,
- 制御入力に対するニュートン法とみなせる方法が考えられる.
  ⇝ 7.1 のケース (1) に区分.

(再掲)

$$\dot{x} = f(x, u, t) \qquad (7.1)$$

$$x(t_0) = x_0 \qquad (7.2)$$

$$\dot{\lambda} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T (x, u, \lambda, t) \qquad (7.3)$$

$$\lambda(t_f) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^T (x(t_f)) \qquad (7.4)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x, u, \lambda, t) = 0 \qquad (7.5)$$

(7.5): 制御入力がみたすべき条件.
⇝ 誤差 $\partial H/\partial u$ が 0 になるように u を修正できればよい.
(・ハミルトン関数 H は状態変数 x と随伴変数 λ にも依存.
・(7.1), (7.3) によって制御入力 u にも依存,
⇝ 影響を考慮.

Assumption

- (7.1), (7.3) はみたされる.
- $\partial H/\partial u \neq 0$.

⇝ 制御入力の微小変化 δu と, その結果生じる状態および随伴変数の微小変化 δx, $\delta \lambda$ によって,

$$\frac{\partial H(x+\delta x, u+\delta u, \lambda+\delta \lambda)}{\partial u} = 0$$

となればよい. (x, u, λ) について Taylor 展開. $\delta x, \delta u, \delta \lambda$ の 2次以上の項を無視する.

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T + \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x}\delta x + \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\delta u + \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial \lambda}\delta \lambda = 0 \qquad (7.24)$$

が得られる.

また, $x+\delta x$, $\lambda+\delta\lambda$ は (7.1), (7.3) をみたす.

$$\therefore\ \delta\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial u}\delta u \qquad (7.25)$$

$$\delta\dot{\lambda} = -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\delta x - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u}\delta u - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \lambda}\delta\lambda \qquad (7.26)$$

(7.2), (7.4) は常に満たされるとする。

このとき、δx と $\delta\lambda$ の境界条件は以下、

$$\delta x(t_0) = 0 \qquad (7.27)$$

$$\delta\lambda(t_f) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x(t_f))\,\delta x(t_f) \qquad (7.28)$$

(7.24) を δu について解く

$$\delta u = -\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\left\{\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x}\delta x + \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial \lambda}\delta\lambda + \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T\right\} \qquad (7.29)$$

(7.25), (7.26) に代入して整理する。
ニュートン法のときと同じ行列 $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x}$$

$$B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^T$$

$$C(t) = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x}$$

を用いて、

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\delta x\\ \delta\lambda\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A(t) & -B(t)\\ -C(t) & -A^T(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta x\\ \delta\lambda\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}v(t)\\ w(t)\end{bmatrix} \qquad (7.30)$$

where

$$v(t) = -\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T$$

$$w(t) = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T$$

と表せる。

$\leadsto$ (7.27), (7.28), (7.30) は線形2点境界値問題。

- 遷移行列
- backward sweep

で解ける。

以上をまとめると，制御入力に対するニュートン法は以下にまとめられる．

Algorithm 7.5. (制御入力に対するニュートン法)

1. $u(t)$ $(t_0 \le t \le t_f)$ を制御入力の初期推定解として与える．

2. 初期条件 (7.2) から状態方程式 (7.1) を終端時刻 t_f まで数値的に解き，状態 $x(t)$ $(t_0 \le t \le t_f)$ を求める．

3. 終端条件 (7.4) から随伴方程式 (7.3) を初期時刻 t_0 まで逆時間方向へ数値的に解き，随伴変数 $\lambda(t)$ $(t_0 \le t \le t_f)$ を求める．

4. 以上で求めた x, u, λ から，各時刻 t $(t_0 \le t \le t_f)$ における勾配 $\partial H/\partial u$ を計算する．
   勾配のノルム $\left(\int_{t_0}^{t_f} \|\partial H/\partial u\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$ が十分0に近ければ停止．
   そうでなければつぎのステップへ．

5. 線形2点境界値 (7.27)，(7.28)，(7.30) を解き，$\delta x(t)$，$\delta\lambda(t)$ $(t_0 \le t \le t_f)$ を計算する．

6. (7.29) によって $\delta u(t)$ $(t_0 \le t \le t_f)$ を計算する．$s = \delta u$ とおく．

7. 制御入力を $u + \alpha s$ としたときの評価関数値 $J[u+\alpha s]$ が最小になるスカラー $\alpha > 0$ を求め，それを α^* とする．

8. $u \leftarrow u + \alpha^* s$ とし，ステップ2へ．

Remark
- このアルゴリズムは，δJ を δx，δu の2次の項まで考えて最小化していると解釈することができる．
  ⇝ 最適解の近傍では評価関数が2次の項までで良く近似できる．
  (収束が速い)
  - 各反復の計算量は多い
  - 初期推定解が最適解から離れている場合，収束が遅い可能性もある．
- 直線探索により，各反復で評価関数が増えることはない
  ⇝ 数値的に発散しにくい．

7.5 他の問題設定
問題設定の例．
- 終端条件に対する拘束条件 $\psi(x(t_f)) = 0$
  ⇝ 評価関数に $\frac{r}{2}\|\psi(x(t_f))\|^2$ $(r > 0)$ を加える．

- 不等式拘束 $C(x, u, t) \ge 0$
  ⇝ - 評価関数の被積分項に対数関数によるバリア関数 $-\frac{1}{r}\log C(x,u,t)$ を加える．
  - 適切な初期推定解を与えるのが困難な場合，ペナルティ関数
    $$P(x,u,t) = \begin{cases} \frac{r}{2} C(x,u,t)^2 & \text{if } C(x,u,t) < 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$
    を被積分項に加える．

など．

7.6. 動的計画法

HJB方程式を逆時間方向に解いていく数値解法も考えられる。

- ある時刻の値関数 $V(x,t)$ が状態の関数として分かっている。
- 偏導関数 $\partial V/\partial x$ も計算できる。

⇝ (6.6)

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(x,t) = \min_u H\left(x, u, \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T(x,t), t\right)$$

より、$\partial V/\partial t$ が決まる。

⇒ 微小時間 Δt による差分近似を使って逆時間方向に値関数と最適フィードバック制御則を計算していくことができる。

計算は境界条件 (6.4)

$$V(x, t_f) = \varphi(x)$$

から開始すればよい。

Algorithm 7.6 (動的計画法)

1. 評価区間を十分小さい時間刻み Δt で分割し、

$$\begin{cases} t = t_f \\ V(x, t_f) = \varphi(x) \end{cases}$$

とおく。

2. 各状態 x に対して (6.6) 右辺のハミルトンHを最小にする制御入力 $u_{opt}(x,t)$ を求める。

3. 次の式で関数 $V(x, t-\Delta t)$ を求める。

$$V(x, t-\Delta t) = V(x,t) + H\left(x, u_{opt}(x,t), \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T(x,t), t\right)\Delta t$$

4. $t \leftarrow t - \Delta t$ とする。

5. $t = t_0$ であれば停止、そうでなければステップ2へ。

- 時間軸を離散化しても、制御入力 $u_{opt}(x,t)$ と値関数 $V(x,t)$ を数式として求めることは多くの場合困難。

  ⇝ アルゴリズムを繰り返すにつれて $u_{opt}(x,t)$ と $V(x,t)$ が複雑な関数になり、ハミルトン関数を最小にする制御入力 $u_{opt}(x,t)$ が陽に求められなくなる。

- 数値的に $u_{opt}(x,t)$, $V(x,t)$ を数値的に求める場合、有限個の状態の組における それらの値を記憶しておき、補間によって状態空間全体の関数を近似する。

  …状態空間の離散化。

  ⇝ 次元の呪い。

@ 状態の次元が小さい場合、状態と制御入力のとりうる値が有限個の場合はDPは有効。