7.2 勾配法

勾配法

- 7.1節の(1)に相当
- 評価関数を減少させるように制御入力の修正を繰り返し、勾配が0になった時点で終了する方法。

状態方程式(7.1)が成り立っているならば、

$$\bar{J} = \varphi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} \{ L(x, u, t) + \lambda^T (f - \dot{x}) \} dt$$

の値は、元の評価関数Jの値に等しい。

⇝ Jの代わりに $\bar{J}$ の微小変化を考える。

- δu : 制御入力の微小変化

⇝ { ・δx : 状態の微小変化 ・$\delta \bar{J}$: 評価関数の微小変化 }

オイラー・ラグランジュ方程式の導出と同様に、

$$\delta \bar{J} = \underbrace{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t_f)) - \lambda^T(t_f) \right)}_{(7.4)} \delta x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \underbrace{\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda}^T \right)}_{(7.3)} \delta x + \frac{\partial H}{\partial u} \delta u \right\} dt$$

ここで $\lambda(t)$ がオイラー・ラグランジュ方程式のうち(7.3), (7.4)をみたすならば、

$$\delta \bar{J} = \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial H}{\partial u} \delta u \, dt$$

… 評価関数値の微小変化 $\delta \bar{J}$ が、制御入力の微小変化 δu で表せる。

Remark

- 関数 $\partial H / \partial u$ が評価関数の勾配に相当。
- $$\int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial H}{\partial u} s(t) \, dt < 0$$
  をみたす関数 $s(t)$ が降下方向に相当。
- 連続時間最適制御問題では、勾配や降下方向が無限次元のベクトル。

勾配法：勾配を用いて探索方法を決定する反復解法

(例) 最急降下法、共役勾配法。

③ 最急降下法.

探索方向として
$$S = -\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T \qquad (7.6)$$
を選ぶ.
… 勾配の (-1) 倍. 最急降下方向に相当.

十分小さな正のスカラー $\alpha > 0$ に対して,
$$\delta u = -\alpha\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T \qquad (7.7)$$
とすれば, $\partial H/\partial u \neq 0$ である限り
$$\delta J = -\alpha\int_{t_0}^{t_f}\left\|\frac{\partial H}{\partial u}\right\|^2 dt < 0$$
となり, J は減少する.

J が減少しなくなるのは $\partial H/\partial u = 0$ となったときで, このとき,
オイラー・ラグランジュ方程式 (7.1) − (7.5) がすべてみたされる.

最急降下法のアルゴリズムは以下.

Algorithm 7.1. (最急降下法)

(1) 適当な時間関数 $u(t)$ $(t_0 \le t \le t_f)$ を, 制御入力の初期推定解として与える.

(2) 初期条件 (7.2) から状態方程式 (7.1) を終端時刻 t_f まで数値的に解き, 状態 $x(t)$ $(t_0 \le t \le t_f)$ を求める.

(3) 終端条件 (7.4) から随伴方程式 (7.3) を初期時刻 t_0 まで逆時間方向へ数値的に解き, 随伴変数 $\lambda(t)$ $(t_0 \le t \le t_f)$ を求める.

(4) 以上で求めた x, u, λ から, 各時刻 t $(t_0 \le t \le t_f)$ における勾配 $\partial H/\partial u$ を計算する. 勾配のノルム
$$\left(\int_{t_0}^{t_f}\left\|\frac{\partial H}{\partial u}\right\|^2 dt\right)^{1/2}$$ … オイラー・ラグランジュ方程式をすべて満たせば stop.
が十分 0 に近ければ停止. そうでなければ, 次のステップへ.

(5) $S \leftarrow -\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T$

(6) 制御入力を $u + \alpha s$ としたときの評価関数値 $J[u + \alpha s]$ が最小になるスカラー $\alpha > 0$ を求め, それを α^* とする. (直線探索)

(7) $u := u + \alpha^* s$ としてステップ (2) へ.

最急降下法と同様に、共役勾配法を考えることもできる。

サイズの等しい2つのベクトル値関数 $v(t)$ と $w(t)$ の内積を、

$$(v, w) := \int_{t_0}^{t_f} v^T(t)\, w^T(t)\, dt$$

と定義する。

$u_k(t)$：共役勾配法の k 回目の反復で得られている制御入力の時間関数

$x_k(t), \lambda_k(t)$：$u_k(t)$ を用いて状態方程式と随伴方程式から計算された状態変数と随伴変数。

$d_k(t)$：最急降下方向。

〜) $t_0 \leq t \leq t_f$ において、

$$d_k(t) = -\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T (x_k(t), u_k(t), \lambda_k(t), t) \qquad (7.8)$$

ポラック・リビエ・ポリャック法

$$\beta_k = \frac{(d_{k+1}, d_{k+1} - d_k)}{(d_k, d_k)} \qquad (7.9)$$

フレッチャー・リーブス法

$$\beta_k = \frac{(d_{k+1}, d_{k+1})}{(d_k, d_k)} \qquad (7.10)$$

アルゴリズムの形にまとめる。

Algorithm 7.2 (共役勾配法)

(1) $k=0$、適当な時間関数 $u(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_f$) を制御入力の初期推定解として与える。

(2) (7.2) から、(7.1) を t_f まで数値的に解き、状態 $x_k(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_f$) を求める。

(3) (7.4) から (7.3) を t_0 まで逆時間方向へ数値的に解き、随伴変数 $\lambda_k(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_f$) を求める。

(4) 以上で求めた u_k, x_k, λ_k から (7.8) によって各時刻 t ($t_0 \leq t \leq t_f$) における最急降下方向 $d_k(t)$ を計算する。$k=0$ ならば $s_0 = d_0$ とする。

(5) 勾配のノルム $\left(\int_{t_0}^{t_f} \|d_k(t)\|^2 dt\right)^{1/2}$ が十分 0 に近ければ stop。そうでなければ次へ。

(6) $J[u_k + \alpha s_k]$ が最小になるスカラー $\alpha > 0$ を求め、α_k とする。$u_{k+1} \leftarrow u_k + \alpha_k s_k$

(7) (2)〜(4) と同様に d_{k+1} を求める。

(8) (7.9) or (7.10) で β_k を決定。

(9) $s_{k+1} \leftarrow d_{k+1} + \beta_k s_k$、$k \leftarrow k+1$、ステップ(5)へ。