7. 最適制御問題の数値解法

7.1. 数値解法の考え方

◎基本的な問題設定

Given : t_0 (初期時刻), t_f (終端時刻), $x(t_0) = x_0$ (初期状態)

状態方程式

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

… 等式制約

評価関数

$$J = \phi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t)\, dt$$

… $x(t)$, $u(t)$ によって値が決まる汎関数.

ハミルトン関数

$$H(x, u, \lambda, t) = L(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t)$$

- λ : 随伴変数 x と同じ次元のベクトル.
- H はスカラー値関数.

最適解が満たすべき, オイラー・ラグランジュ方程式は次.

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (7.1)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (7.2)$$

$$\dot{\lambda} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T (x, u, \lambda, t) \quad (7.3)$$

$$\lambda(t_f) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^T (x(t_f)) \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x, u, \lambda, t) = 0 \quad (7.5)$$

Points

- オイラー・ラグランジュ方程式は. 未知関数 $x(t)$, $\lambda(t)$, $u(t)$ を含むが,
  (7.1) ~ (7.5) のいずれかによってある関数が他の関数から決まる場合がある.
  ⇝ 実質的な未知関数の個数は減る.

- 何らかの条件が成り立つように未知量を決定する問題に帰着.
  … これを数値的に解く.

代表的なケースに、次のものが考えられる。

(1) 未知量：制御入力関数　$u(t)$　$(t_0 \leq t \leq t_f)$
適当な $u(t)$ を与える。
⤳ 状態変数 $x(t)$ は、初期条件 (7.2) から (7.1) を数値的に解くことで求められる。
⤳ (7.4) で $\lambda(t)$ の終端条件が決まる。(7.3) を逆時間方向へ数値的に解く。

◎ (7.5) が成り立つか否かが問題
⤳ (7.5) が成り立つように、制御入力の関数を修正していく反復法。

(2) $\lambda(t_0)$ ：未知量
適当な $\lambda(t_0)$ を与える。
⤳ (7.2) と合わせて、(7.1), (7.3) の微分方程式を数値的に解くことができる。
⤳ $u(t)$ は (7.5) によって $x(t)$, $\lambda(t)$ から決定される。

◎ 終端条件 (7.4) が成り立つか否かが問題
⤳ (7.4) が成り立つように $\lambda(t_0)$ を修正していく反復法。

(3) $x(t)$, $\lambda(t)$, $u(t)$ $(t_0 \leq t \leq t_f)$ のすべてを未知量にする。
⤳ (7.1) ~ (7.5) のすべてにおける誤差を全体的に減少させていくように未知量を修正。

この章では、オイラー・ラグランジュ方程式の構造を利用した最初の2つの場合を考える。