5.4. 一般的な問題設定

より一般的な問題設定を考える。
… 状態方程式，等式制約条件，一般的な初期条件，終端条件を考える.
初期時刻と終端時刻を任意にする.

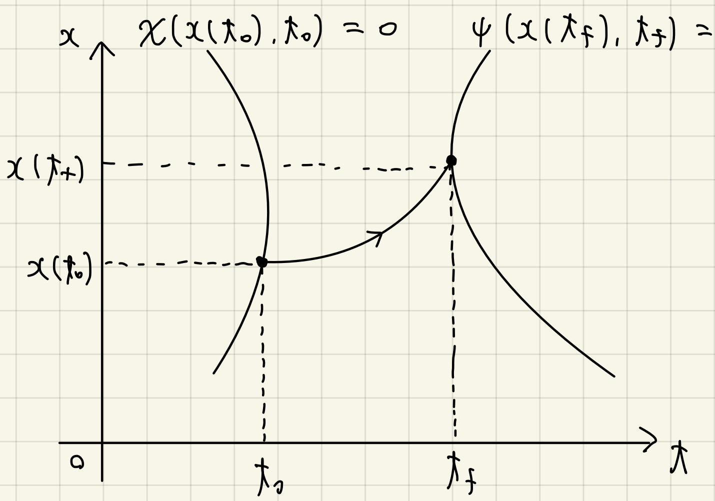
$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \qquad (5.31)$$
$$C(x(t), u(t), t) = 0 \qquad (5.32)$$
$$\chi(x(t_0), t_0) = 0 \qquad (5.33)$$
$$\psi(x(t_0, t_0) = 0 \qquad (5.34)$$

Remark
- 不等式制約の場合は，対応するラグランジュ乗数の符号に関する条件と相補性条件を加えればよい（ここでは略）

一般的な問題設定では，初期状態 $x(t_0)$ が必ずしも指定されない.
⇝ 評価関数 J に初期状態のコストを加える.

$$J = \eta(x(t_0), t_0) + \phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t)\, dt$$

@ 初期状態と初期時刻は固定されていない.
⇝ (5.33) で与えられる超平面上にあればよい.（終端状態，時刻も同様）
これらの自由度も用いて評価関数を最小化.



@ 初期条件や終端条件も含めて制約条件に対応するラグランジュ乗数をすべて考える.

$$\begin{cases} (5.31) : \lambda(t) \\ (5.32) : \rho(t) \\ (5.33) : \mu \\ (5.34) : \nu \end{cases}$$

を対応するラグランジュ乗数とする.

⇝ 停留条件を求めるための汎関数を構成する.

$$\bar{J} = \eta(x(t_0), t_0) + \mu^T \chi(x(t_0), t_0) + \phi(x(t_f), t_f) + \nu^T \psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left(H(x, u, \lambda, \rho, t) - \lambda^T \dot{x} \right) dt$$

ただし、ハミルトニアン関数は、

$$H(x,u,\lambda,\rho,t) = L(x,u,t) + \lambda^T f(x,u,t) + \rho^T C(x,u,t)$$

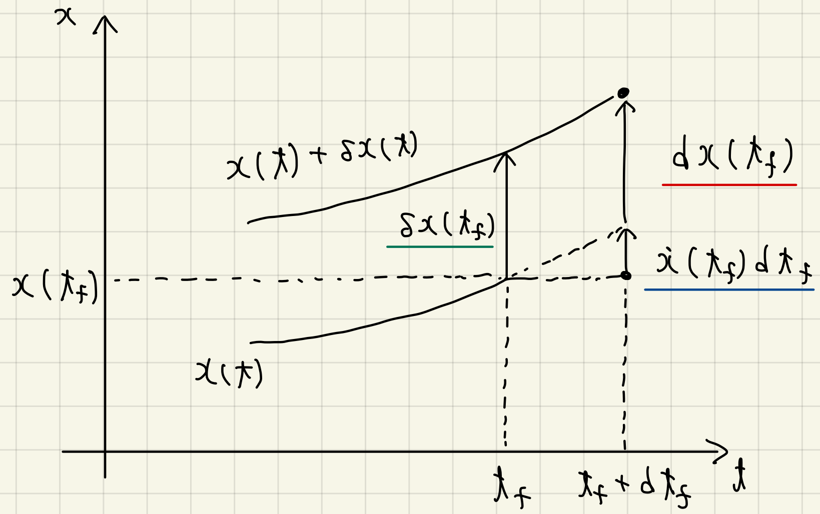
と定義している。

◎変分計算では、$\lambda^T \delta \dot{x}$ の部分積分のほかに、初期時刻 t_0 と終端時刻 t_f の変化も考慮する。

・終端時刻での変分 $\delta x(t_f)$ は時刻 t_f での微小変化
⇝ 終端時刻 t_f そのものの微小変化による効果は含まない。

・終端時刻が dt_f だけ変化したとき、状態は $\dot{x}(t_f)dt_f$ だけ変化する。
⇝ $dx(t_f)$：終端時刻での変分と終端時刻の微小変化の両方による終端状態の正味の変化

$$dx(t_f) = \delta x(t_f) + \dot{x}(t_f)\,dt_f$$



◎汎関数の変分：終端時刻も含めて全てが同時に微小変化したときの汎関数の変化。
⇝ 終端ペナルティ $\varphi(x(t_f), t_f)$ の変分では $dx(t_f)$ を考える必要がある。
（初期コスト η に関しても同様）

初期時刻と終端時刻の変化による積分項の微小変化も生じる。

式を見やすくするため、

$$\tilde{\eta}(x(t_0),\mu,t_0) = \eta(x(t_0),t_0) + \mu^T \chi(x(t_0),t_0)$$

$$\tilde{\varphi}(x(t_f),\nu,t_f) = \varphi(x(t_f),t_f) + \nu^T \psi(x(t_f),t_f)$$

と定義する。以上を考慮して、変分 δJ を計算する。

$$\bar{J} = \underbrace{\bar{\eta}(x(t_0), \mu, t_0)}_{①} + \underbrace{\bar{\varphi}(x(t_f), \nu, t_f)}_{②} + \underbrace{\int_{t_0}^{t_f} (H(x, u, \lambda, \rho, t) - \lambda^T \dot{x})\, dt}_{③}$$

より,

① に関して,

$$\delta\left[\bar{\eta}(x(t_0), \mu, t_0)\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} & \dfrac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx(t_0) \\ dt_0 \end{bmatrix} = \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} dx(t_0) + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} dt_0$$

② に関して,

$$\delta\left[\bar{\varphi}(x(t_f), \nu, t_f)\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} & \dfrac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx(t_f) \\ dt_f \end{bmatrix} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} dx(t_f) + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} dt_f$$

③ に関して, 初期時刻と終端時刻の微小変化は,

$$(H - \lambda^T \dot{x})\, dt_f - (H - \lambda^T \dot{x})\, dt_0$$

であり, 被積分項の微小変化は,

$$\delta\left[H(x, u, \lambda, \rho, t) - \lambda^T \dot{x}\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial x} & \dfrac{\partial H}{\partial u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta u \end{bmatrix} - \lambda^T \delta \dot{x}$$

$$= \frac{\partial H}{\partial x} \delta x + \frac{\partial H}{\partial u} \delta u - \lambda^T \delta \dot{x}$$

である. よって, 変分 $\delta \bar{J}$ は,

$$\delta \bar{J} = \underbrace{\boxed{\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} dx(t_0)} + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} dt_0}_{①} + \underbrace{\boxed{\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} dx(t_f)} + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} dt_f}_{②}$$

$$+ \underbrace{(H - \lambda^T \dot{x})\, dt_f - (H - \lambda^T \dot{x})\, dt_0}_{③-1}$$

$$+ \underbrace{\int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \delta x + \frac{\partial H}{\partial u} \delta u - \lambda^T \delta \dot{x}\right) dt}_{③-2} \quad \cdots ⊛$$

ここで, ⊛ の ③-2 について, 5.1 節と同様に, 部分積分を適用すると,

$$\int_{t_0}^{t_f} \lambda^T \delta \dot{x} = \left[\lambda^T \delta x\right]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \dot{\lambda}^T \delta x\, dt$$

$$= \lambda^T \delta x(t_f) - \lambda^T \delta x(t_0) - \int_{t_0}^{t_f} \dot{\lambda}^T \delta x\, dt$$

である. また, ③-1 と合わせると,

$$(H - \lambda^T \dot{x})\, dt_f - (H - \lambda^T \dot{x})\, dt_0 - \left(\lambda^T \delta x(t_f) - \lambda^T \delta x(t_0)\right)$$

$$= H dt_f - \lambda^T(\dot{x}\, dt_f + \delta x(t_f)) - H dt_0 + \lambda^T(\dot{x}\, dt_0 + \delta x(t_0))$$

$$= H dt_f \boxed{- \lambda^T dx(t_f)} - H dt_0 + \boxed{\lambda^T dx(t_0)}$$

これをふまえて、㊍ を整理すると

$$\delta \bar{J} = \underbrace{\boxed{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \lambda^T\right) dx(t_0)}}_{(5.38)} + \underbrace{\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} - H\right)}_{(5.41)} dt_0$$

$$+ \underbrace{\boxed{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \lambda^T\right) dx(t_f)}}_{(5.38)} + \underbrace{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + H\right)}_{(5.42)} dt_f$$

$$+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \underbrace{\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda}^T\right)}_{(5.37)} \delta x + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial u}}_{(5.39)} \delta u \right\} dt$$

を得る。

任意の変分および初期時刻，終端時刻の変化に対して，変分 $\delta \bar{J}$ が 0 になることから，対応する係数をすべて 0 とおいて停留条件が導かれる。

$$\dot{x} = f(x, u, t) \qquad (5.35)$$

$$\chi(x(t_0), t_0) = 0, \quad \psi(x(t_f), t_f) = 0 \qquad (5.36)$$

$$\dot{\lambda} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T (x, u, \lambda, \rho, t) \qquad (5.37)$$

$$\lambda(t_0) = -\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^T \Bigg|_{t=t_0}, \quad \lambda(t_f) = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^T \Bigg|_{t=t_f} \qquad (5.38)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x, u, \lambda, \rho, t) = 0 \qquad (5.39)$$

$$C(x, u, t) = 0 \qquad (5.40)$$

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} - H\right)\Bigg|_{t=t_0} = 0 \qquad (5.41)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + H\right)\Bigg|_{t=t_f} = 0 \qquad (5.42)$$

(5.35)–(5.37): 連立微分方程式

(5.36), (5.38): 境界条件 (2点境界値問題)

(5.39), (5.40): $\rho(t), u(t)$ → $x(t), \lambda(t)$ の関数

(5.41), (5.42): t_0, t_f を決定する条件

(5.39)，(5.40)
… 各時刻で入力 $u(t)$ の次元と等式制約のラグランジュ乗数 $\rho(t)$ の次元との和に等しい数の条件を与える。

⇝ 解ければ $u(t)$ と $\rho(t)$ が $x(t)$ および $\lambda(t)$ の関数として決定される。

⇝ (5.35)，(5.37) は $x(t)$ と $\lambda(t)$ の連立微分方程式とみなせる。

(5.36)，(5.38) は境界条件 (2点境界値問題)

t_0, t_f は (5.41)，(5.42) から決定

Remark

- 未知関数 $x(t)$, $\lambda(t)$ の次元よりも境界条件の数が多い.
  … $\tilde{\varphi}$ や $\tilde{\psi}$ は初期条件と終端条件に対応するラグランジュ乗数 μ と ν を含んでいる.
  ⇝ 境界で決まるべき未知量の数と境界条件の数は一致する.

- (5.39) が入力 u を陽に含まず, $C(x, t) = 0$ のような状態 x に対する等式制約の場合, 入力 u とラグランジュ乗数 ρ を決めるのに十分な数の条件が与えられない.
  … $C(x(t), t)$ は恒等的に 0 より, 何回時間微分しても恒等的に 0 のはず.
  … 以下, 簡単のため, C, u はスカラーとし, 1階微分を考える.

1階微分を考える.

$$\frac{d}{dt} C(x(t), t) = \frac{\partial C}{\partial x} \underbrace{f(x, u, t)}_{\dot{x}(t)} + \frac{\partial C}{\partial t} = 0$$

- この左辺に u が現れるなら, 上式を等式制約とみなすとともに, $C(x(t_0), t_0) = 0$ という制約を付与.
- 左辺に u が現れないならば, u が現れるまで時間微分. 階数を k とする.

$$\bar{C}(x(t), t) = \frac{d^k}{dt^k} C(x(t), t) = 0 \qquad (5.43)$$

を新たな等式制約とすればよい. そして,

$$C(x(t_0), t_0) = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial t}(x(t_0), t_0) = 0, \ldots$$
$$\frac{d^{k-1} C}{d t^{k-1}}(x(t_0), t_0) = 0 \qquad (5.44)$$

を初期条件に加える.

初期条件の代わりに (5.44) と同様の終端条件が成り立ち, かつ, (5.43) が恒等的に成り立つ.
⇝ C, $\dfrac{dC}{dt}$, …, $\dfrac{d^{k-1}C}{dt^{k-1}}$ が恒等的に 0.

状態に対する不等式制約 $C(x, t) \leq 0$ の場合, 制約条件が有効になる時刻 t_1 において, (5.44) と同様の条件が成り立ち, 有効になっている間 (5.43) が恒等的に成り立つ. 有効でなくなる時刻 t_2 でも (5.44) と同様の条件が成り立つ.

これらを用いて停留条件を導ける.

C や u がベクトルの場合でも, 要素ごとに微分回数が異なりうることに注意する以外は同様.