5.3. 最適解の摂動。

最適制御問題の設定がわずかに変わったとき、最適解がどのように変化するか？
e.g. 初期状態 $x(t_0)$ の微小変化によって最適制御入力がどれくらい変化するか？

隣接停留曲線
問題設定に応じて変化する停留曲線の族。

いま、
$u(t)$：最適制御，$x(t)$：対応する最適軌道，$\lambda(t)$：随伴変数
がオイラー・ラグランジュ方程式 (5.4)−(5.6)

$$
(*)\left\{\begin{array}{ll}
\dot{x} = f(x,u,t) & x(t_0) = x_0 \\
\dot{\lambda} = -\left(\dfrac{\partial H}{\partial x}\right)^T (x,u,\lambda,t), & \lambda(t_f) = \left(\dfrac{\partial \phi}{\partial x}\right)^T (x(t_f)) \\
\dfrac{\partial H}{\partial u}(x,u,\lambda,t) = 0 &
\end{array}\right.
$$

をみたすとする。また、初期状態 $x(t_0)$ が x_0 から $x_0 + \delta x_0$ へ微小変化したものとする。
⇝ 最適制御の微小変化：$\delta u(t)$
　最適軌道 〃 ：$\delta x(t)$　　　$(t_0 \le t \le t_f)$
　随伴変数 〃 ：$\delta \lambda(t)$
とする。

微小変化後も、オイラー・ラグランジュ方程式が成り立つので、

$$\frac{d}{dt}(x+\delta x) = f(x+\delta x, u+\delta u, t) \quad ①$$

$$x(t_0) + \delta x(t_0) = x_0 + \delta x_0 \quad ②$$

$$\frac{d}{dt}(\lambda+\delta\lambda) = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T (x+\delta x, u+\delta u, \lambda+\delta\lambda, t) \quad ③$$

$$\lambda(t_f) + \delta\lambda(t_f) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^T (x(t_f) + \delta x(t_f)) \quad ④$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x+\delta x, u+\delta u, \lambda+\delta\lambda, t) = 0 \quad ⑤$$

それぞれ、Taylor 展開を考える。

① $$f(x+\delta x, u+\delta u, t) = f(x,u,t) + \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta u \end{bmatrix} + o\left(\left\| \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta u \end{bmatrix} \right\| \right)$$

③ $$-\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T (x+\delta x, u+\delta u, \lambda+\delta\lambda, t)$$
$$= -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T (x,u,\lambda,t) - \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial x \partial \lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta u \\ \delta\lambda \end{bmatrix} + o\left(\left\| \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta u \\ \delta\lambda \end{bmatrix} \right\| \right)$$

④ $$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^T (x(t_f) + \delta x(t_f)) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^T x(t_f) + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)^T (x(t_f))\, \delta x(t_f) + o(\|\delta x(t_f)\|)$$

⑤ $$\frac{\partial H}{\partial u}(x+\delta x, u+\delta u, \lambda+\delta\lambda, t)$$
$$= \frac{\partial H}{\partial u}(H, u, \lambda, t) + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} & \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial \lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta u \\ \delta \lambda \end{bmatrix} + o\left(\left\| \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta u \\ \delta \lambda \end{bmatrix} \right\| \right)$$

これらと(*)を比較する。

$$\delta \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial u}\delta u \qquad (5.20)$$

$$\delta x(t_0) = \delta x_0 \qquad (5.21)$$

$$\delta \dot{\lambda} = -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\delta x - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u}\delta u - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \lambda}\delta\lambda \qquad (5.22)$$

$$\delta\lambda(t_f) = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)^T (x(t_f))\, \delta x(t_f) \qquad (5.23)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x}\delta x + \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\delta u + \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial \lambda}\delta\lambda = 0 \qquad (5.24)$$

Remark
- (5.20)−(5.24) の f や H の偏導関数は、元の最適解 $(x(t), u(t), \lambda(t))$ において評価されている。
- 微小変化 $\delta u(t)$, $\delta x(t)$, $\delta\lambda(t)$ は任意ではない。

ここで、(5.24)より。

$$\delta u = -\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x}\delta x + \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial \lambda}\delta\lambda\right) \qquad (5.25)$$

$\partial H/\partial\lambda = f^T$ より、(5.22)の $\delta\lambda$ の係数行列は、

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \lambda} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \lambda \partial x}\right)^T = \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^T\right\}^T = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T$$

(5.24)についても同様に

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial \lambda} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^T$$

を得る。

よって、(5.25)より。

$$\delta u = -\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x}\delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^T \delta\lambda\right)$$

を得るので、(5.20)より。

$$\delta \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x - \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x}\delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^T \delta\lambda\right) \quad (\because (5.25))$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x}\right)}_{A(t)}\delta x - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^T}_{B(t)}\delta\lambda$$

$$= A(t)\,\delta x - B(t)\,\delta\lambda$$

を得る。また、(5.22) より、

$$\delta\dot{\lambda} = -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\delta x + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x}\delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^T \delta\lambda\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \delta\lambda$$

$(\because (5.25))$

$$= \underbrace{\left(-\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x}\right)}_{-C(t)}\delta x - \Bigg(\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^T}_{A(t)^T}\Bigg)\delta\lambda$$

$$= -C(t)\,\delta x - A(t)^T\,\delta\lambda$$

を得る。ただし、$A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ は 5.2 節 で定義されたものである。

よって 微小変化 $(\delta x(t), \delta\lambda(t))$ に対して、2次の時変線形 2点境界値問題が得られる。

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\delta x \\ \delta\lambda\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t) \\ -C(t) & -A(t)^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta x \\ \delta\lambda\end{bmatrix} \tag{5.26}$$

$$\delta x(t_0) = \delta x_0, \quad \delta\lambda(t_f) = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)^T (x(t_f))\,\delta x(t_f) \tag{5.27}$$

線形常微分方程式の2点境界値問題は、容易に解くことができる。

- 遷移行列を使う方法
- backward sweep という方法 (LQ 制御と関連)

ここでは後者を用いる。

δλ と δx の関係

$$\underline{\delta\lambda(t) = S(t)\,\delta x(t)}, \quad S(t_f) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x(t_f)) \tag{5.28}$$

線形な関係。LQと同様。

を仮定し、(5.26) に代入、

$$\begin{bmatrix}\delta\dot{x} \\ \dot{S}\delta x + S\delta\dot{x}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B \\ -C & -A^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta x \\ S\delta x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(A - BS)\delta x \\ (-C - A^T S)\delta x\end{bmatrix}$$

上半分で $\delta\dot{x}$ が決まるので、下半分に代入。

$$\dot{S}\delta x + S\left((A - BS)\delta x\right) = (-C - A^T S)\delta x$$

$$\therefore \dot{S}\delta x = (-A^T S - SA + SBS - C)\delta x$$

よって

$$\begin{bmatrix}\delta\dot{x} \\ \dot{S}\delta x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(A - BS)\delta x \\ (-A^T S - SA + SBS - C)\delta x\end{bmatrix}$$

この式の下半分は、リッカチ微分方程式

$$\dot{S} + A^T S + SA - SBS + C = 0 \qquad (5.29)$$

— $S(t)$の決定

をみたす$S(t)$によって常に成り立つ。これらの微分方程式と終端条件(5.28)から$S(t)$が決まれば、上半分の

$$\delta\dot{x}(t) = \left(A(t) - B(t)S(t)\right)\delta x(t)$$

— $\delta x(t)$の決定

は$\delta x(t)$の常微分方程式であり、初期条件$\delta x(t_0) = \delta x_0$と合わせて$\delta x(t)$を決める。

(5.25)より、最適制御の微小変化は、

$$\delta u(t) = \underbrace{-\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\left\{\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^T S(t)\right\}}_{\text{ゲイン行列}} \underbrace{\delta x(t)}_{\text{状態の微小変化}} \qquad (5.30)$$

で与えられる。

以上の結果を利用して、ある基準となる最適軌道$\bar{x}(t)$から実際の軌道がわずかにずれたときの最適制御を容易に近似できる。

1. 基準となる最適制御$\bar{u}(t)$と随伴変数$\bar{\lambda}(t)$を数値計算で求める。行列$S(t)$も求める。

2. 時変のゲイン行列を、
$$K(t) := -\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\left\{\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^T S(t)\right\}$$
によって計算する。
…その際、右辺のfやHの偏導関数は、基準となる軌道$(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{\lambda}(t))$に沿って評価する。

3. 実際の制御対象の状態$x(t)$を測定して、それに対する制御入力を、
$$u(t) = \bar{u}(t) + K(t)(\bar{x}(t) - x(t))$$
によって与える。

⤳ これによって、基準となる軌道からずれた$x(t)$に対しても近似的に最適制御が行える。

適用可能な状況

- 初期状態$x(t_0)$が厳密には固定されないが、ある程度範囲が限定される場合。
- 制御の途中にわずかに外乱が入る場合
- 初期状態以外の問題設定がわずかに変動した場合。