5.2 局所最適性の十分条件.

停留条件だけでは、実際に評価関数が最小になっているかどうか分からない。
⇝ 第2変分を考えることで、局所最適性をいえることがある。

◎ 制御入力がどのように変動しても、状態方程式が満たされている限り、
(5.2)の評価関数 J と (5.3)の拡張された評価関数 $\bar{J}$ は同じ値をとる。
⇒ 両者の第2変分は一致する。

積分項の $\lambda^T(f-\dot{x})$ が0になる

拡張された評価関数 $\bar{J}$ の第2変分を考える。

$$\bar{J} = \varphi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} \left(H(x,u,\lambda,t) - \lambda^T \dot{x}\right) dt \qquad (5.3)$$

まず、$\varphi(x(t_f))$ について、$x(t)$ における Taylor 展開を考える(添字略)

本だと $\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}$ になってる?

$$\varphi(x+\delta x) = \varphi(x) + \underbrace{\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}\delta x}_{\substack{1\text{次の項} \\ \leadsto\ \delta\bar{J}}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\delta x)^T \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2}\delta x}_{\substack{2\text{次の項} \\ \leadsto\ \delta^2\bar{J}}} + o(\|\delta x\|^2)$$

どちらが正しいか分からない

$H(x,u,\lambda,t)$ について、$x(t)$, $u(t)$ における Taylor 展開を考える。

$$H(x+\delta x, u+\delta u, \lambda, t) = H(x,u,\lambda,t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta u \end{bmatrix}}_{1\text{次の項} \to \delta\bar{J}}$$
$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} & \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta u \end{bmatrix}}_{2\text{次の項} \to \delta\bar{J}} + o\left(\left\| \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta u \end{bmatrix} \right\|^2\right)$$

$\lambda^T \dot{x}$ について、$\dot{x}(t)$ における Taylor 展開を考える。

$$\lambda^T(\dot{x} + \delta\dot{x}) = \lambda^T \dot{x} + \underbrace{\lambda^T \delta\dot{x}}_{1\text{次の項} \to \delta\bar{J}}$$

以上より、$\bar{J}$ の第2変分は

本では $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ になってる?

$$\delta^2 \bar{J} = \frac{1}{2}\delta x(t_f)^T \boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}}(x(t_f))\,\delta x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} & \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta u \end{bmatrix} dt \qquad Ⓐ$$

である。

Remark.
- $\delta x(t)$ と $\delta u(t)$ は完全に自由ではない。微小変化後の状態 $x(t) + \delta x(t)$ と $u(t) + \delta u(t)$ も状態方程式をみたすので、

$$\frac{d}{dt}(x(t) + \delta x(t)) = f(x+\delta x, u+\delta u, t), \quad x(t_0) + \delta x(t_0) = x_0$$

となる。

状態方程式の右辺をTaylor展開する。

$$f(x+\delta x,\, u+\delta u,\, t) = f(x,u,t) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta u \end{bmatrix} + o\left(\left\| \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta u \end{bmatrix} \right\| \right)$$

もとの状態方程式との差をとる。

$$\delta \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial u}\delta u, \qquad \delta x(t_0) = 0 \qquad (5.13)$$

(5.13)の初期条件は $\delta x(t_0) = 0$ より、

$$\begin{cases} \delta x(t) = 0 \\ \delta u(t) = 0 \end{cases} \quad (t_0 \leq t \leq t_f)$$

は(5.13)をみたし、かつ $\delta^2 J = 0$ である。

オイラー・ラグランジュ方程式をみたす停留解が存在するとき、Th 4.1 より、

$$\exists \gamma > 0 \ \text{s.t.}\ \delta^2 J[u, \delta u] \geq \gamma \|\delta u\|^2_{C}, \quad \forall \delta u(t) \neq 0 \qquad (5.14)$$

本だと C^0 になってる？

が成り立てば、$u(t)$ は局所最適解である。
ただし、$\delta^2 J$ に含まれる $\delta x(t)$ は、(5.13)により $\delta u(t)$ から決まる。

第2変分 $\delta^2 J$ と $\delta u(t)$ の関係を明らかにするために変形を行う。
まず、$\delta x(t_0) = 0$ より、微分可能な任意の行列値関数 $S(t)$ $(t_0 \leq t \leq t_f)$ に対して、

対称？ → $S = S^T$

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}\left(\delta x(t)^T S(t)\, \delta x(t) \right) dt = \left[\delta x(t)^T S(t)\, \delta x(t) \right]_{t_0}^{t_f} = \delta x(t_f)^T S(t_f)\, \delta x(t_f)$$

が成り立つ。また、

$$\frac{d}{dt}\left[\delta x(t)^T S(t)\, \delta x(t) \right] = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial u}\delta u \right)^T S(t)\, \delta x(t) + \delta x(t)^T \dot{S}(t)\, \delta x(t) + \delta x(t)^T S(t) \left(\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial u}\delta u \right)$$

$$= \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T S + \dot{S} + S \frac{\partial f}{\partial x} & S \frac{\partial f}{\partial u} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^T S & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta u \end{bmatrix}$$

ここで $S = S^T$ を使ってる

である。したがって、

$$-\delta x(t_f)^T S(t_f)\, \delta x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{S} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T S + S \frac{\partial f}{\partial x} & S \frac{\partial f}{\partial u} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^T S & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta u \end{bmatrix} dt = 0 \quad Ⓑ$$

となる。

よって、Ⓑ$\times \frac{1}{2}$ を $\delta^2 \bar{J}$ (Ⓐ) の両辺に加えると、

$$
\begin{aligned}
\delta^2 \bar{J} &= \frac{1}{2}\delta x(t_f)^T \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x(t_f)) - S(t_f) \right) \delta x(t_f) \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} \delta x(t) \\ \delta u(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{H}_{11} & \bar{H}_{12} \\ \bar{H}_{12}^T & \bar{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x(t) \\ \delta u(t) \end{bmatrix} dt \qquad ⓒ
\end{aligned}
$$

where

$$
\begin{cases}
\bar{H}_{11} = \dot{S} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T S + S \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \\
\bar{H}_{12} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} + S \frac{\partial f}{\partial u} \\
\bar{H}_{22} = \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}
\end{cases}
$$

4章と同様の2次形式

となる。4章と同じく被積分項の(1,1)ブロック以外で平方完成するため、以下の2次形式を考える。

$$
\left(\bar{H}_{22}^{-1}\bar{H}_{12}^T \delta x + \delta u\right)^T \bar{H}_{22} \left(\bar{H}_{22}^{-1}\bar{H}_{12}^T \delta x + \delta u\right) \qquad \bar{H}_{22} = \bar{H}_{22}^T
$$

$$
\begin{aligned}
&= (\delta x)^T \underbrace{\left(\bar{H}_{22}^{-1}\bar{H}_{12}^T\right)^T \bar{H}_{22} \left(\bar{H}_{22}^{-1}\bar{H}_{12}^T\right)}_{\bar{H}_{12}\bar{H}_{22}^{-1}\bar{H}_{22}\bar{H}_{22}^{-1}\bar{H}_{12}^T = \bar{H}_{12}\bar{H}_{22}^{-1}\bar{H}_{12}^T} \delta x \\
&\quad + (\delta x)^T \underbrace{\left(\bar{H}_{22}^{-1}\bar{H}_{12}^T\right)^T \bar{H}_{22}}_{\bar{H}_{12}\bar{H}_{22}^{-1}\bar{H}_{22} = \bar{H}_{12}} \delta u \\
&\quad + (\delta u)^T \bar{H}_{22} \left(\bar{H}_{22}^{-1}\bar{H}_{12}^T\right) \delta x \\
&\quad + (\delta u)^T \bar{H}_{22} \delta u \\
&= \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{H}_{12}\bar{H}_{22}^{-1}\bar{H}_{12}^T & \bar{H}_{12} \\ \bar{H}_{12}^T & \bar{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta u \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

これとⓒを比較すると、$S(t)$ が

$$
\bar{H}_{11} = \bar{H}_{12}\bar{H}_{22}^{-1}\bar{H}_{12}^T, \quad S(t_f) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x(t_f)) \qquad (5.15)
$$

をみたせば、

$$
\delta^2 \bar{J} = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} \left(\bar{H}_{22}^{-1}\bar{H}_{12}^T \delta x + \delta u\right)^T \bar{H}_{22} \left(\bar{H}_{22}^{-1}\bar{H}_{12}^T \delta x + \delta u\right) dt
$$

と表せる。

したがって、停留解に沿って、$\bar{H}_{22} > 0$ が成り立つとき、$\delta^2 \bar{J}$ が最小解をとるのは、

$$
\delta u = -\bar{H}_{22}^{-1}\bar{H}_{12}^T \delta x \qquad (5.16)
$$

のときに限る。それ以外は $\delta^2 \bar{J} > 0$ となる。

(5.13), (5.15), (5.16) を整理すると、$\delta^2 \bar{J}$ が最小値をとるための条件は以下で、

(i)
$$\delta \dot{x} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\left(-\bar{H}_{22}^{-1}\bar{H}_{12}^{T}\right)\right\}\delta x \quad (\because (5.13),(5.16))$$

対称?

$$= \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\left(\boxed{\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u}} + S\frac{\partial f}{\partial u}\right)^{T}\right\}\delta x \quad (\because \bar{H}_{12}, \bar{H}_{22} \text{の定義})$$

$$= \left\{ \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u}\right)}_{A(t)} - \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^{T}\right)}_{B(t)} S(t)\right\}\delta x$$

(ii)
$$\dot{S} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{T} S + S\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$$
$$= \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} + S\frac{\partial f}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} + S\frac{\partial f}{\partial u}\right)^{T} \quad (\because (5.15), \bar{H}_{00} \text{の定義})$$
$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} + S\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u}$$
$$+ \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^{T} S + S\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^{T} S$$

$$\therefore \dot{S}(t) + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u}\right)}_{A(t)}^{T} S(t) + S(t)\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u}\right)}_{A(t)}$$
$$+ S(t)\underbrace{\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^{T}}_{B(t)} S + \underbrace{\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u}\right)}_{C(t)} = 0$$

よって、
$$\delta \dot{x} = (A(t) - B(t)S(t))\delta x, \quad \delta x(t_0) = 0 \qquad (5.17)$$
$$\dot{S}(t) + A^{T}(t)S(t) + S(t)A(t) - S(t)B(t)S(t) + C(t) = 0 \qquad (5.18)$$
$$S(t_f) = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x(t_f)) \qquad (5.19)$$
本では $\frac{\partial G}{\partial x}(x(t_f))$（どちらが正しいか?）

ここで、時変の行列 $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ は以下のように定義され、オイラー・ラグランジュ方程式の解 $(x(t), u(t), \lambda(t))$ によって評価されている。

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u}$$
$$B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^{T}$$
$$C(t) = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u}$$

(5.17) は、線形微分方程式で、初期条件が $\delta x(t_0) = 0$ だから、解は、

$$\delta x(t) = 0 \quad (t_0 \le t \le t_f)$$

しかない。

⇝ (5.16) より、$\delta^2 J$ が最小値 0 をとるのは、

$$\delta u(t) = 0 \quad (t_0 \le t \le t_f)$$

に限る。

また、4.3 節と同様に、(5.14)

$$\delta^2 J[u, \delta u] \ge \gamma \|\delta u\|_{c'}^2$$

が成立することも示せる。

Remark
- ここまでの議論は、行列 $S(t)$ が評価区間 $t_0 \le t \le t_f$ にわたって定義されていることが前提。
- $S(t)$ を決定する条件 (5.18), (5.19) は、LQ 制御のリッカチ微分方程式と同じ形になっている。

以上をまとめると、変分法における Th 4.3 と類似する形で孤立局所最適解の十分条件が得られる。

Th 5.2 (2次の十分条件)

オイラー・ラグランジュ方程式をみたす停留解 $(x(t), u(t), \lambda(t))$ が孤立局所最適解であるための十分条件は、以下が成り立つことである。

(1) 停留解に沿って

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(x(t), u(t), t) > 0$$

がすべての時刻 t ($t_0 \le t \le t_f$) で成り立つ。

(2) 停留解に沿って与えられたリッカチ微分方程式 (5.18), (5.19) の解 $S(t)$ がすべての時刻 t ($t_0 \le t \le t_f$) で発散しない。

Remark
- (1) を強いルジャンドル条件という。
- (2) をヤコビ条件という。
- 行列 $S(t)$ が発散する場合、発散する時刻を共役点という。

等号を含む場合、弱いルジャンドル条件
(局所最適性の必要条件)