4.2. 拘束条件付変分問題

変分問題でも、さまざまな拘束条件が課せられる場合がある。

(1) 汎関数 (4.1) を考え、積分区間にわたって等式制約
$$C(x(t), \dot{x}(t), t) = 0 \quad (t_0 \leq t \leq t_f)$$
が課せられている場合を考える。

⇝ 1点tの等式制約条件が無限個あるとみなす。
⇒ ラグランジュ乗数も各tごとに導入。関数$\lambda(t)$とする。

汎関数を
$$\bar{J}[x] = \int_{t_0}^{t_f} \bar{L}(x(t), \dot{x}(t), t)\, dt$$
$$\bar{L}(x(t), \dot{x}(t), t) = L(x(t), \dot{x}(t), t) + \lambda(t)\, C(x(t), \dot{x}(t), t)$$
とすればよい。

Remark
- 不等式制約の場合、相補性条件とラグランジュ乗数の符号に関する条件が加わる。
- 拘束条件を与える関数Cがベクトルならば、ラグランジュ乗数も同じサイズのベクトルとなる。i.e.,
$$\bar{L} = L + \lambda^T C$$

(2) $J[x]$とは別の汎関数$K[x]$がある値cになるという制約。
$$K[x] := \int_{t_0}^{t_f} C(x(t), \dot{x}(t), t)\, dt = c$$
これは積分拘束条件
…拘束条件1つのみ。

汎関数は
$$\bar{J}[x] = \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), \dot{x}(t), t)\, dt + \lambda\left(\int_{t_0}^{t_f} C(x(t), \dot{x}(t), t)\, dt - c\right)$$
$$= \underbrace{\int_{t_0}^{t_f} \bar{L}(x(t), \dot{x}(t), t)}_{(1)\text{と同じ}}\, dt - \underbrace{\lambda c}_{\text{変関数に依存しない}}$$

⇝ 停留条件は等式制約と同じ。

例4.2. ハミルトンの原理

保存力のみが加わる力学系を考える。

$q(t)$: 一般化座標のベクトル
$T(q, \dot{q})$: 運動エネルギー
$V(q)$: ポテンシャルエネルギー

$L(q, \dot{q}) := T(q, \dot{q}) - V(q)$: ラグランジュ関数

ある固定された2点 $q(t_0)$, $q(t_f)$ を結ぶ運動は、

$$\delta \int_{t_0}^{t_f} L(q, \dot{q})\, dt = 0$$

をみたすことがハミルトンの原理から知られている。

⇝ 非保存力を含まないラグランジュの運動方程式が得られる。

制約条件が存在するとき
一般化座標に等式拘束条件 $C(q) = 0$ が課されたとき、

$$\delta \int_{t_0}^{t_f} (L + \lambda^T C)\, dt = 0$$

$C(q)$ が $\dot{q}$ を含まないことから、停留条件は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} \underbrace{- \lambda^T \frac{\partial C}{\partial q}}_{\text{一般化力}} = 0$$

(制約条件を満たすために生じる拘束力)