4. 変分法.

モチベ

- 最適制御問題は 時間の関数である状態 $x(t)$ と入力 $u(t)$ の汎関数である評価関数 J を等式制約（状態方程式）の下で最小化する問題（変分問題）

⇝ この章では、最適制御問題のキソとなる変分法を扱う.

4.1. 汎関数の停留条件.

🈩 基本概念

汎関数
　関数を与えると、それに対応して実数値が決まる写像

変分法
　関数の微分法を汎関数に拡張した計算.

ここでは、$x(t) \in \mathbb{R}^n$ $(t_0 \leq t \leq t_f)$ から実数値を決める

$$J[x] := \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), \dot{x}(t), t)\, dt \qquad (4.1)$$

という形の汎関数を考える.

ただし、$L(x, \dot{x}, t)$ はスカラー値関数.

- 関数 x が決まると、積分値 $J[x]$ が決まる
- x：変関数（"変数"が関数である、という意味）

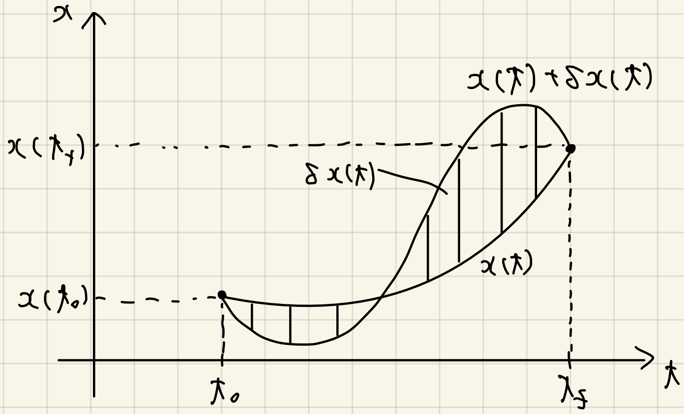
変分問題
　汎関数の最小化、最大化を考える問題.

以下、基本的に最小化を考える.

🈩 微分法と変分法.

微分法
- 変数を微小変化させたときの関数の変化を調べる

変分法
- 変関数を微小変化させたときの汎関数の変化を調べる.



$\delta x(t)$: $x(t)$ の変分
　関数 $x(t)$ を微小変化させたときの変化分

⇝ 微小変化が t に依存する関数

変関数に境界条件等が課されている場合、変分にも条件が課せられる

許容曲線 / 許容関数
問題設定によって許される変関数

許容変分
問題設定によって許される変分

固定端点問題
初期値 $x(t_0)$ と終端値 $x(t_f)$ がともに固定されている問題
… 許容変分は

$$\begin{cases} \delta x(t_0) = 0 \\ \delta x(t_f) = 0 \end{cases}$$

を満たす。

自由端点問題
初期値と終端値の一方または両方が自由

☑ 準備と記法
変関数を $[t_0, t_f]$ で1回連続微分可能な関数とする。

$C^1[t_0, t_f]$: 上記のような関数全体の集合。

無限次元ベクトル空間

非線形計画法における実行可能解に相当するのが許容曲線。

S : 実行可能領域に相当する許容曲線全体の集合。

x^* が局所最適解

$$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists \varepsilon > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall x \in S \cap B(x^*, \varepsilon), \quad J[x^*] \leq J[x]$$

where

$$B(x^*, \varepsilon) := \left\{ x \in C^1[t_0, t_f] \;\middle|\; \|x - x^*\|_{C^1} < \varepsilon \right\} \quad (\text{開球})$$

C^1 におけるノルムを

$$\|x\|_{C^1} := \max_{t \in [t_0, t_f]} \underbrace{\|x(t)\|} + \max_{t \in [t_0, t_f]} \underbrace{\|\dot{x}(t)\|}$$

と定義する。

n次元のユークリッドノルム

※ 一般に、目的関数の被積分項が x の r 階までの導関数を含むとき、変関数 x は r 回連続微分可能関数とし、そのノルムを

$$\|x\|_{C^r} := \sum_{k=0}^{r} \max_{t \in [t_0, t_f]} \|x^{(k)}(t)\|$$

とする。

② 最適性条件

ある許容曲線 x^* が汎関数 $J[x]$ に対する局所最適解となるための条件を考える。

⇝ 許容曲線が $x^*+\delta x$ へ変化したとして、
$J[x^*+\delta x]$ と $J[x^*]$ を比較する。

各 t において、被積分関数 L の $x^*(t)$ まわりの Taylor 展開を考える。

$$L(x^*(t)+\delta x(t),\ \dot{x}^*(t)+\delta\dot{x}(t),\ t)$$

$$= \underset{L(x^*(t),\,\dot{x}^*(t),\,t)}{L} + \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x} & \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta \dot{x} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta \dot{x} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta \dot{x} \end{bmatrix} + o\left(\left\|\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta \dot{x} \end{bmatrix}\right\|^2\right)$$

これから第1変分が求まる

上式の積分 $J[x^*+\delta x]$ も δx, $\delta\dot{x}$ の次数ごとに分けて、

$$J[x^*+\delta x] = J[x^*] + \underbrace{\delta J[x^*, \delta x]}_{J\text{の第1変分}} + \underbrace{\delta^2 J[x^*, \delta x]}_{J\text{の第2変分}} + o\left(\left\|\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta \dot{x} \end{bmatrix}\right\|^2\right) \text{の積分}$$

と表される。

◎ $\delta\dot{x}$ は δx によって決まるので、変数に含めない。

適当な境界条件をみたす関数 η $(\|\eta\|_{C^1}=1)$ とスカラー $\alpha>0$ を用いて、任意の許容変分が

$$\delta x = \alpha\eta$$

の形で表せるものとする。

e.g.
- 固定端点問題
  $\eta(t_0) = \eta(t_f) = 0$
- 自由端点問題
  境界条件は不要

⇝ 自動的に $x^*+\alpha\eta \in \mathcal{S}$.（拘束条件のない非線形計画法と同じ状況）

⇝ 許容変分 $\delta x = \alpha\eta$ に対して、

$$J[x^*+\alpha\eta] = J[x^*] + \alpha\,\delta J[x^*, \eta] + \alpha^2\,\delta^2 J[x^*, \eta] + o(\alpha^2)$$

となる。

したがって、以下のことがいえる。

- ある η に対して $\delta J[x^*, \eta] \neq 0$ ならば、x^* は局所最適解ではあり得ない。
  (非線形最適化における最適性条件と同様の議論)

- $\delta J[x^*, \eta] = 0$ が成り立つとき、α を十分小さくとれば、$J[x^* + \alpha\eta] - J[x^*]$ の符号は $\alpha^2 \delta^2 J[x^*, \eta]$ の符号と同じになる。
  $\leadsto$ $\delta^2 J[x^*, \eta] \geq 0$ でなければならない

  x^* が局所最適解 $\Rightarrow J[x^* + \alpha\eta] \geq J[x^*]$

- 任意の η に対して、$\delta J[x^*, \eta] = 0$ が成り立つとき
  $\exists \gamma > 0, \ \forall \eta \neq 0, \ \delta^2 J[x^*, \eta] \geq \gamma$

  $\Rightarrow \ 0 < \alpha \ll 1, \ \gamma + o(\alpha^2)/\alpha^2 > 0$

$$\leadsto \ J[x^* + \alpha\eta] - J[x^*] = \alpha^2 \left(\delta^2 J[x^*, \eta] + \frac{o(\alpha^2)}{\alpha^2} \right)$$
$$\geq \alpha^2 \left(\gamma + \frac{o(\alpha^2)}{\alpha^2} \right) > 0$$

$\leadsto$ x^* は孤立局所最適解。

$\delta x = \alpha\eta$, $\alpha = \|\delta x\|_{C^1}$ であることを用いて、以上の議論を言い換える。

Th 4.1

(1) (停留条件)
許容曲線 x^* が局所最適解
$\Rightarrow$ 任意の許容変分 δx に対して $\delta J[x^*, \delta x] = 0$。

(2) (2次の必要条件)
許容曲線 x^* が局所最適解
$\Rightarrow$ 任意の許容変分 δx に対して、
$$\begin{cases} \delta J[x^*, \delta x] = 0 \\ \delta^2 J[x^*, \delta x] \geq 0 \end{cases}$$

(3) (2次の十分条件)
ある定数 $\gamma > 0$ が存在して、任意の許容変分 δx に対して、
$$\begin{cases} \delta J[x^*, \delta x] = 0 \\ \delta^2 J[x^*, \delta x] \geq \gamma \|\delta x\|_{C^1}^2 \end{cases}$$
$\Rightarrow$ 許容曲線 x^* は孤立局所最適解。

第2変分 $\delta^2 J[x^*, \delta x]$ はヘッセ行列の2次形式を無限次元に拡張したもの と見なせる.

⇝「$\delta^2 J[x^*, \delta x]$ が正定である」ということを

$$\delta^2 J[x^*, \delta x] > 0 \quad \text{for any} \quad \delta x \neq 0$$

として テイギ できる.

However...

- 無限次元の場合, 固有値も一般に無限個ある.
  - ⇝ $\delta^2 J[x^*, \delta x]$ が正定でも, いくらでも0に近い固有値が存在しうる.
    - ⇝ 2次の十分条件をみたすような $\delta > 0$ は存在しない.

◎ 2次の十分条件では, $\delta^2 J[x^*, \delta x]$ の正定性より強い条件が要求される.

停留条件の書き直し

Th 4.1 の停留条件は変分 δx を含む形になっている
変分 δx を含まず, 汎関数のみに依存した形の停留条件を得るには, 次の補題を用いる.

Lemma 4.1

$f(t)$: $[t_0, t_f]$ で連続なベクトル値関数
$\eta(t)$: $f(t)$ と同じサイズの1回連続微分可能なベクトル値関数.
$\eta(t_0) = \eta(t_f) = 0$,

$$\int_{t_0}^{t_f} f(t)^T \eta(t)\, dt = 0$$

$\Rightarrow f(t)$ は区間 $[t_0, t_f]$ で恒等的に0.

(証明略)

Remark

- 関数 $f(t)$ の連続性が本質的.
  - … $f(t)$ が不連続で, ある1点のみで非ゼロであれば, 補題が成り立たない.
- $\eta(t)$ が k 回連続微分可能と仮定しても, 補題が成り立つ.
- $\eta(t_0)$, $\eta(t_f)$ が0に固定されない場合にも, 補題が成り立つ.

◎汎関数 (4.1) の場合、導関数 $\dot{x}(t)$ の変分 $\delta\dot{x}(t)$ が変関数 $x(t)$ の変分 $\delta x(t)$ と無関係ではない。

∵ $$\frac{d}{dt}\left(x(t)+\delta x(t)\right) = \dot{x}(t) + \delta\dot{x}(t)$$

であり、$x(t)$ の変化に伴って生じる $\dot{x}(t)$ の変化は $\frac{d}{dt}(\delta x(t))$ である。

⇝ これが $\dot{x}(t)$ の変分 $\delta\dot{x}(t)$ であるので、

$$\delta\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\delta x(t) \qquad (4.2)$$

これに注意して $J[x]$ の第1変分を計算する。

被積分関数 $L(x(t)+\delta x(t), \dot{x}(t)+\delta\dot{x}(t), t)$ の Taylor 展開（最適性条件の paragraph）で、$\delta x(t)$, $\delta\dot{x}(t)$ の1次の項のみを考える。
第1変分は、

$$\delta J[x, \delta x] = \int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x}\right)dt$$

となる。ここで、(4.2) を用いると、第2項は以下のようになる。

$$\int_{t_0}^{t_f}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x}\,dt = \int_{t_0}^{t_f}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\left(\frac{d}{dt}\delta x(t)\right)dt$$

$$= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\right]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x\,dt \quad (\because 部分積分)$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f)\,\delta x(t_f) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(t_0), \dot{x}(t_0), t_0)\,\delta x(t_0) - \int_{t_0}^{t_f}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x\,dt$$

この部分積分の結果を第1変分に代入。

これが変分計算のキーポイント

$$\delta J[x, \delta x] = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f)\,\delta x(t_f) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(t_0), \dot{x}(t_0), t_0)\,\delta x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f}\left\{\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right\}\delta x\,dt \qquad (4.3)$$

(4.3) は、$\delta\dot{x}$ を含まない形。

任意の許容変分 δx に対して、$\delta J[x, \delta x] = 0$ となる

⇐ 被積分項における δx の係数が恒等的に 0。(∵ Lemma 4.1)

固定端点問題

$\delta x(t_0) = \delta x(t_f) = 0$ より、(4.3) の第1項、第2項は自動的に消える

自由端点問題

$x(t_f)$ が自由のとき、$\delta x(t_f)$ も自由。

⇒ 係数が 0 でなければならない。

以上をまとめると、次の定理を得る。

Th 4.2.（オイラーの方程式）

固定端点問題における (4.1) の停留条件は、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad (t_0 \leq t \leq t_f) \qquad (4.4)$$

終端値 $x(t_f)$ が自由な場合、停留条件としてさらに

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f)\,\delta x(t_f) = 0 \qquad (4.5)$$

が加わる。

Remark

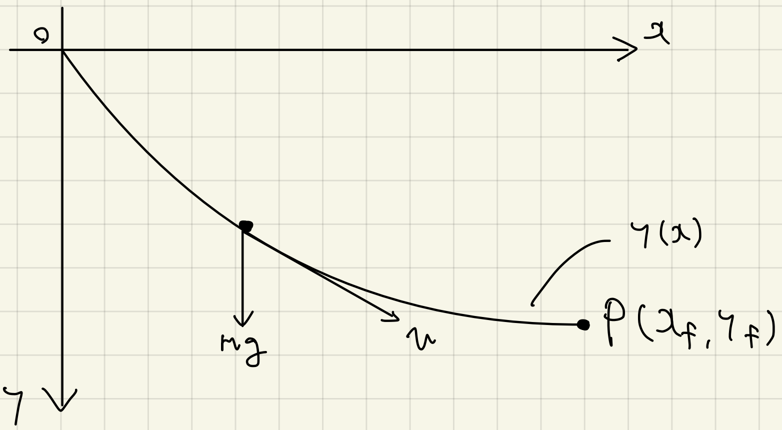
(4.4)：オイラー・ラグランジュ方程式

(4.5)：横断性条件。

以下の例題を考える。

例 4.1. 最速降下線問題

- 質点が重力のみを受けて曲線に沿って運動するとき与えられた2点間の移動時間が最短になるような曲線を求める問題。



$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(x_f) = y_f \end{cases}$$

（独立変数が x）

以下、$y(x)$ を変関数とする変分問題を定式化し、最速降下線を求める。

$$\begin{cases} g：重力加速度 \\ m：質点の質量 \\ v：〃\ 速さ \end{cases}$$

始点を出発するときの速さを 0 とする。

エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgy = 0$$

$$\therefore v(y) = \sqrt{2gy}$$

ここで、水平方向に dx だけ進むのにかかる時間 dt は、弧長 $\sqrt{1+(y'(x))^2}dx$ を速さ v で割った値になるので、

$$dt = \sqrt{\frac{1+(y'(x))^2}{2gy(x)}}\,dx$$

と表される。

よって、点Pに到達するのにかかる時間は、

$$J[y] = \int_0^{x_f} L(y(x), y'(x))\,dx \qquad L(y, y') = \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2gy}}$$

という汎関数になり、オイラーの方程式は、

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

となる。

両辺に y' を掛けて、L が x を陽に含まないことに注意して変形すると、

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}y' - L\right) = 0$$

が得られる。

(∵) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}y' - L\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)y' + \frac{\partial L}{\partial y'}y''(x) - \frac{\partial L}{\partial y}y'(x) - \frac{\partial L}{\partial y'}y''(x)$$

$$= y'\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) - \frac{\partial L}{\partial y}\right) = 0$$ (証)

よって、上式のかっこ内は定数。

$$a := \frac{\partial L}{\partial y'}y - L$$

として整理すると、

$$-\frac{1}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+(y')^2}} = a$$

両辺を2乗して、$b = 1/(2ga^2)$ とおけば、

$$y\{1+(y')^2\} = b \qquad (4.6)$$

この微分方程式の解は、変数 θ を用いて、

$$x(\theta) = \frac{b}{2}(\theta - \sin\theta) \qquad y(\theta) = \frac{b}{2}(1-\cos\theta) \qquad (4.7)$$

とパラメータ表示できる。

…サイクロイド。

ある θ で $(x(\theta), y(\theta)) = (x_f, y_f)$ をみたすように b を決定すればよい